Dichteste Kugelpackung. Eine Idee von Gauß

Tóth, László Fejes

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.311-321

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Dichteste Kugelpackung. Eine Idee von Gauß

Von László Fejes Tóth

Die quadratischen Formen spielen eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie sowie in anderen Gebieten der Mathematik. Die Theorie der binären quadratischen Formen wurde 1773 von Lagrange entwickelt, und später von Gauß in seinen berühmten Disquisitiones Arithmeticae vertieft. Nachdem Gauß in den Disquisitiones auch die wichtigsten Eigenschaften der ternären quadratischen Formen festgelegt hat, widmete der Freiburger Physiker L. A. Seeber den positiven ternären quadratischen Formen ein ganzes Buch, das 1831 erschien. In demselben Jahr schrieb Gauß eine ausführliche Besprechung dieses Buches, in der er zugleich eine von Seeber ausgesprochene Vermutung bewies:

Ist
$$\sum a_{ij} x_i\, x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$
eine reduzierte, positiv definite ternäre quadratische Form, so gilt
$$a_{11}a_{22}a_{33} \leqq 2D,$$
wo $D = |a_{ij}|$ die Determinante der Koeffizienten bedeutet. Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die Form mit einem Vielfachen der Form
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$
äquivalent ist.

Gauß betrachtet „ein System parallelepipedisch geordneter, d. i. durch die Durchschnitte dreier Systeme paralleler äquidistanter Ebenen sich ergebener Punkte", und weist darauf hin, daß sämtliche „Hauptmomente der Theorie der ternären Formen hier ihre geometrische Bedeutung" finden. Dann setzt er fort: „Man wird ... daraus erkennen, welch ein reiches Feld hier den Untersuchungen geöffnet ist, die nicht bloß für sich ein hohes theoretisches Interesse haben, sondern auch zu einer eben so bequemen als allgemeinen Behandlung aller Relationen unter den Krystallformen benutzt werden können."

Wie es Gauß voraussah, erwies sich der Begriff des Punktgitters und die dadurch erzeugte geometrische Interpretation arithmetischer Probleme als äußerst fruchtbar. Wir beschränken uns hier auf ein spezielles Gebiet, das mit dem obigen Satz von Gauß (den Gauß Seeberschen Lehrsatz nennt) zusammenhängt.

Es stellte sich heraus, daß aus diesem Satz die Lösung des Problems der dichtesten Gitterpackung von Kugeln folgt. Mit diesem Satz beginnt also die Theorie der Packungen, die heute über eine beträchtliche Literatur verfügt. Außer Kugelpackungen wurden auch Packungen von anderen konvexen Körpern in zwei-, drei- und höherdimensionalen Räumen untersucht. Wir wollen hier einige neuere Resultate der Theorie besprechen, die sich auf allgemeine Packungen beziehen.

Verteilen wir im Raum abzählbar viele konvexe oder allgemeiner gestaltete Körper, die auch übereinandergreifen dürfen. Die *Dichte* der Verteilung wird durch einen Grenzwert definiert, der sich als der Quotient aus dem Gesamtvolumen der Körper und dem Volumen des ganzen Raumes interpretieren läßt. Wenn die Körper nicht übereinandergreifen, so sprechen wir von einer *Packung* oder *Lagerung*. Wenn wir die Randpunkte nicht zu den Körpern zählen, also die Körper als offene Punktmengen ansehen, so gehört bei einer Packung jeder Raumpunkt zu höchstens einem Körper. Den Packungen stehen die *Überdeckungen* dual gegenüber, wo jeder Raumpunkt zu mindestens einem abgeschlossenen Körper gehört. Um diese Dualität zu betonen, werden die Packungen auch *Unterdeckungen* genannt. Wir wollen uns hier hauptsächlich mit Packungen beschäftigen.

Das erste Resultat, das sich auf allgemeine Packungen bezieht, rührt von dem großen norwegischen Zahlentheoretiker A. Thue her. In einer Jugendarbeit (1892) beschäftigte sich Thue mit Kreispackungen in der Ebene. Später kehrte er in einer anderen Arbeit (1910) zu demselben Problem zurück. Seine Überlegungen zeigen, daß die Dichte einer Packung kongruenter Kreise nicht die Schranke $\pi / \sqrt{12} = 0{,}9069\ldots$ übertreffen kann. Diese Konstante ist gleich dem Inhaltsverzeichnis eines Kreises und des umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks. Die Schranke wird durch eine Kreispackung erreicht, in der jeden Kreis sechs andere berühren. Die Forderung, daß die Dichte einer Kreispackung maximal wird, bedingt also automatisch eine gitterförmige Struktur. Dies gilt natürlich nicht in einem ganz exakten Sinn: in der Gitterstruktur können Brechungslinien oder sonstige Unregelmäßigkeiten auftreten, ohne die Dichte zu ändern.

Ein analoger Satz für Kreisüberdeckungen stammt von Kershner (1939): Wird die Ebene durch kongruente Kreise überdeckt, so beträgt die Kreisdichte mindestens $2\pi / \sqrt{27} = 1{,}209\ldots$. Diese Konstante bedeutet das Inhaltsverhältnis eines Kreises und des einbeschriebenen regulären Sechsecks. Die Schranke wird durch eine Kreisüberdeckung erreicht, in der jeden Kreis die übrigen in den Ecken eines regulären Sechsecks schneiden. Grob gesprochen führt also auch das Problem der dünnsten Kreisüberdeckung zu einer gitterförmigen Struktur.

C. A. Rogers (1964) bemerkt, daß der erste Aufsatz von Thue zu knapp gefaßt ist um den Beweis rekonstruieren zu können, und daß der zweite Beweis zwar überzeugend ist, sich aber auf gewisse Kompaktheitseigenschaften stützt, die nicht leicht zu beweisen sind.

1940 gab ich einen neuen Beweis des Thueschen Satzes. Ein anderer Beweis rührt von Segre und Mahler (1944) her. Es folgten weitere Beweise und verschiedenartige, weitgehende Verallgemeinerungen. Wir berichten nur über die wichtigsten Resultate.

Die Probleme der dichtesten Kreisunterdeckung und das der dünnsten Kreisüberdeckung lassen sich in einem allgemeinen Problem vereinigen. Streuen wir in der Ebene kongruente Kreise mit einer vorgegebenen Dichte aus. Setzen wir voraus, daß die Dichte im offenen Intervall $(\pi / \sqrt{12},\ 2\pi / \sqrt{27})$ liegt. Dann kann man die Kreise weder so anordnen, daß sie einander nicht überlappen, noch so, daß sie die Ebene vollständig überdecken. Wie soll man die Kreise anordnen, damit sie den größtmöglichen Teil der Ebene überdecken? Ich habe gezeigt (1953), daß die beste

Anordnung auch bei diesem Problem gitterförmig ist: die Kreismittelpunkte bilden ein gleichseitiges Dreieckgitter.

Hieraus folgt die Lösung eines alten Problems der Lokationstheorie. Diese in den dreißiger Jahren von Christaller, Lösch und anderen deutschen Wissenschaftlern begründete Theorie beschäfigt sich mit wirtschaftlichen Ansiedlungen industrieller Objekte, landwirtschaftlicher Gebiete, Wohnsiedlungen, usw. Wir wollen in einem homogen bevölkerten Land eine große, aber fest vorgegebene Anzahl von Fabriken aufbauen, die das Land mit einer gewissen Ware versehen. Jeder Ort wird von der nächstgelegenen Fabrik versorgt. Wie soll man die Fabriken verteilen, um die Gesamttransportkosten zu minimisieren? Es wurde vermutet, daß man die Fabriken in die Ecken eines gleichseitigen Dreieckgitters legen muß. Diese Vermutung wird durch das obige Resultat bestätigt (Abb. 1).

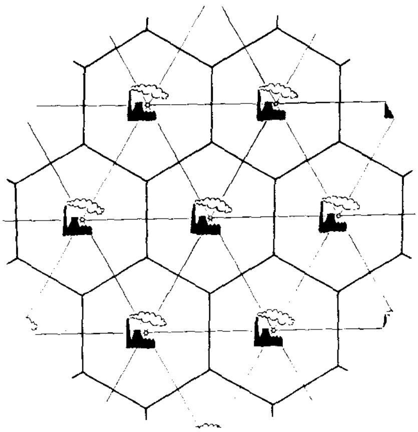

Abb. 1

Statt Kreisen betrachten wir jetzt beliebige konvexe Scheiben. Ich habe folgenden Satz (1950) bewiesen: Es seien s eine konvexe Scheibe, H ein umbeschriebenes Sechseck vom kleinstmöglichen Flächeninhalt und d die Dichte einer Packung von kongruenten Exemplaren von s. Dann gilt $d \leqq s/H$.

Hier und im folgenden bezeichnen wir eine Punktmenge und ihr Inhaltsmaß mit demselben Symbol.

Diese Dichtenschranke läßt sich offensichtlich erreichen, wenn man die Ebene mit kongruenten Exemplaren von H auspflastern kann. Dies trifft sicher zu, wenn s zentralsymmetrisch ist. Hieraus folgt: *Die Dichte einer beliebigen Packung kongruenter zentralsymmetrischer Scheiben kann nie die Dichte der dichtesten Gitterpackung der Scheiben übertreffen.*

Vermutlich gelten analoge Sätze für die Überdeckung. Dies zu beweisen gelang mir aber nur unter einer Nebenbedingung. Wir betrachten zwei Bereiche, die so übereinandergreifen, daß beide Bereiche in disjunkte Teile zerfallen, wenn wir den

Durchschnitt der Bereiche herausheben. Wir sagen dann, daß die Bereiche einander *kreuzen.* Nun gilt der Satz: Es seien s eine konvexe Scheibe, h ein einbeschriebenes Sechseck vom größtmöglichen Flächeninhalt und D die Dichte einer Überdeckung der Ebene durch einander nicht kreuzende kongruente Exemplare von s. Dann gilt $D \leqq s/h$.

Hieraus folgt, daß *die Dichte einer Überdeckung der Ebene durch einander nicht kreuzende kongruente zentralsymmetrische konvexe Scheiben nie kleiner ist als die Dichte der dünnsten Gitterüberdeckung.*

Ähnlich wie bei Kreisen lassen sich auch bei allgemeinen konvexen Scheiben das Packungs- und das Überdeckungsproblem in einem allgemeinen Problem vereinigen. Nach meinem ursprünglichen Beweis des betreffenden Satzes für Kreise entstanden einige neue Beweise, aber keiner war dazu geeignet, um das entsprechende Problem für konvexe Scheiben zu behandeln. Schließlich gelang es G. Fejes Tóth (1972) das Problem mit einer neuen Methode anzugreifen und einen tiefliegenden, sehr allgemeinen Satz zu beweisen, der unter anderem auch die beiden obigen Ungleichungen als Sonderfälle enthält. Statt diesen Satz in seiner vollständigen Allgemeinheit auszusprechen, formulieren wir das betreffende Problem unter gewissen Nebenbedingungen: Wie soll man verschobene Exemplare einer konvexen zentralsymmetrischen Scheibe mit einer vorgegebenen Dichte so anordnen, daß sie den größtmöglichen Teil der Ebene überdecken? Der Satz von G. Fejes Tóth beantwortet diese Frage. In überraschender Weise stellte es sich heraus, daß die Lösung nicht immer durch eine gitterförmige Anordnung gegeben ist. Es gibt Scheiben, wo bei einer gewissen Dichte eine günstigste Anordnung so entsteht, daß man die Scheiben in einem gewissen Winkelbereich in ein Gitter und in dem komplementären Winkelbereich in ein geeignetes anderes Gitter legt.

Dies zeigt, daß bei den vorigen Problemen die Gitterstruktur eine keineswegs von vornherein zu erwartende Eigenschaft der extremalen Konfiguration ist. Wir müssen es vielmehr als eine äußerst interessante Tatsache ansehen, daß z. B. in einer chaotischen Packung von kongruenten zentralsymmetrischen konvexen Scheiben diese, auf ein einziges Kommando sich zu verdichten, sich parallel orientieren und in ein Gitter einstellen.

Verschiedene Resultate sind bezüglich Packungen inkongruenter Kreise bekannt. Wir heben nur eines hervor. Fachleute der Zement- und Hüttenindustrie haben mir folgende Frage gestellt. Durch Mahlen und Sieben kann man von einem gewissen Stoff Körnchen vorgegebener Größe herstellen. Wie soll man etwa drei verschiedene Korngrößen wählen und in welchem Verhältnis soll man die Körnchen von diesen Größen herstellen, um mit ihnen den Raum möglichst dicht ausfüllen zu können? Wir sind undenkbar weit davon, diese Frage exakt beantworten zu können. Jedoch liefert uns folgender Satz einen Anhaltspunkt: *Eine Packung von Kreisen von n verschiedenen Größen läßt mindestens 100* $\left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{12}}\right)^n$ % *der Ebene frei.* Diese Schranke ist genau, obwohl sie sich nur für $n = 1$ erreichen läßt. Der Satz besagt, daß man folgenderweise verfahren soll, wenn man die Ebene mit Kreisen von n verschiedenen frei wählbaren Größen möglichst dicht ausfüllen möchte. Man beginnt mit der dichtesten Packung kongruenter Kreise, dann nimmt man gleich große kleine Kreise, deren Größenordnung im Vergleich zu den vorher genützten Kreisen sehr klein ist und füllt mit ihnen die Lücken der vorigen Packung in der dichtesten Anordnung aus, usw.

Das Problem der dichtesten Packung kongruenter Kreise führt unter gewissen Nebenbedingungen zu interessanten Konfigurationen. Stellen wir uns eine ultramoderne Stadt mit gleichen, zylinderförmigen Häusern vor. Jedem Haus soll sich tangential ein kreisförmiger Landungsplatz mit einem vorgegebenen konstanten Radius anschließen. Die Landungsplätze dürfen einander überlappen, so daß mehrere Häuser einen gemeinsamen Landungsplatz haben können. Gesucht wird unter diesen Bedingungen die dichteste Anordnung der Häuser. Wir können weitere Bedingungen stellen: jedem Haus soll sich außer einem Landungsplatz auch ein kreisförmiger Spielplatz oder auch noch eine kreisförmige Parkanlage anschließen. Als Lösungen derartiger Probleme erhielt Molnár (1966) mannigfaltige schöne Kreisanordnungen (Abb. 2).

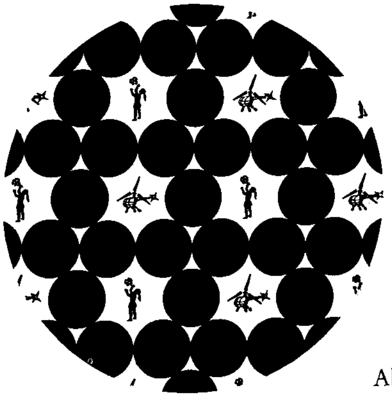

Abb. 2

In einem schönen Aufsatz erörterte van der Waerden (1961), wie das Problem der dichtesten Packung von n kongruenten Kreisen auf der Sphäre einerseits mit einem biologischen Problem, nämlich mit der Verteilung der Öffnungen an den Pollenkörnern, andererseits mit der Informationstheorie zusammenhängt. Das Problem scheint aber auch von anderen Aspekten aus von Interesse zu sein. Zum Beispiel erhebt sich in der Stereochemie das mit dem fraglichen Problem äquivalente Problem, wieviele kugelförmige Moleküle eines gewissen Stoffes ein Molekül eines gewissen anderen Stoffes berühren können.

Für die Dichte d einer Packung von $n \geqq 3$ kongruenten Kreisen auf der Sphäre habe ich (1943) folgende Abschätzungsformel aufgestellt:

$$d \leqq \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{n-2}{n}\,\frac{\pi}{6}\right).$$

Gleichheit gilt nur für die Flächeninkreise eines regulären Dreikantmosaiks $\{2,3\}$, $\{3,3\}$, $\{4,3\}$ und $\{5,3\}$. Damit ist das Problem für $n = 3, 4, 6$ und 12 gelöst. Für $n = 5, 7, 8$ und 9 wurde das Problem von Schütte und van der Waerden (1951) und für $n = 10$ und 11, in einem noch nicht veröffentlichten Aufsatz, von L. Danzer erledigt. Wir heben einige Fälle hervor. In der dichtesten Packung von $n = 8$ Kreisen liegen die Kreismittelpunkte in den Ecken des Archimedischen Antiprismas (3, 3, 3, 4). Für $n = 5$ und 11 ergeben sich die Lösungen indem man von der dichtesten Packung von 6 bzw. 12 Kreisen einen Kreis wegläßt. Ein schöner neuer Beweis für den Fall $n = 11$ stammt von Böröczky (1977). Außer den Fällen mit $n \leq 12$ ist die Lösung nur noch für $n = 24$ bekannt. Wie Robinson (1961) mit Hilfe von schön aufgebauten, feinen Überlegungen zeigte, spannen hier die Kreismittelpunkte den Archimedischen Körper (3, 3, 3, 3, 4) auf.

Das Problem der dichtesten Packung von n kongruenten sphärischen Kreisen fesselte das Interesse von zahlreichen weiteren Mathematikern und auch von manchen Naturforschern. Es wurden dichte Packungen für viele Werte von n konstruiert und weitere, mit dem ursprünglichen Problem eng zusammenhängende Probleme behandelt. Kehren wir aber zur obigen Abschätzungsformel zurück. Es läßt sich zeigen, daß unsere Dichtenschranke eine zunehmende Funktion von n ist, die für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\pi / \sqrt{12}$ strebt. In einem asymptomatischen Sinn ist also unsere Schranke auch für $n = \infty$ genau: sie enthält den Thueschen Satz, nach dem auch die Flächeninkreise des Euklidischen Mosaiks $\{6,3\}$ eine dichteste Packung bilden.

Nun gibt es eine widerspruchsfreie Geometrie, in der sich die Reihe der regelmäßigen Dreikantmosaike $\{2,3\}, \ldots, \{6,3\}$ unbegrenzt fortsetzen läßt, und die auch sonst unvergleichbar reicher ist an regulären und halbregulären Mosaiken als die Sphäre und die Euklidische Ebene. Gauß scheint der erste zu sein, der die Möglichkeit dieser sogenannten hyperbolischen Geometrie erkannt hat. Unabhängig von Gauß und voneinander wurde die hyperbolische Geometrie von dem Ungarn J. Bolyai und dem Russen N. J. Lobatschefskij begründet.

1952, anläßlich der 150. Wiederkehr des Geburtstages von J. Bolyai, veranstaltete die ungarische János Bolyai Mathematische Gesellschaft mit Feierlichkeiten verbundene wissenschaftliche Tagungen. Dies veranlaßte mich, mich der natürlichen Frage zuzuwenden, ob auch die Flächeninkreise eines Mosaiks $\{p, 3\}$ mit $p > 6$ eine dichteste Packung bilden. Bei dieser Frage stößt man aber auf eine unerwartete Schwierigkeit, die mit dem Begriff der Dichte zusammenhängt. Auf diese Schwierigkeit habe ich selbst hingewiesen, aber erst Böröczky hat durch verschiedene, sehr geistreiche Konstruktionen gezeigt, daß es in der hyperbolischen Ebene einfach unmöglich ist, einen „vernünftigen" Dichtenbegriff einzuführen. Unter anderem konstruierte er eine Packung kongruenter Kreise und dazu eine Zerlegung der hyperbolischen Ebene in flächengleiche konvexe Zellen, so daß jede Zelle genau einen Kreis enthält. Es wäre dann natürlich die Packungsdichte als das Inhaltsverhältnis von einem Kreis und einer Zelle zu definieren. Böröczky konstruierte aber zu derselben Packung eine zweite, zu der ersten ähnliche Zerlegung in flächengleiche Zellen, aber mit einem vom Inhalt der ersten Zellen verschiedenen Flächeninhalt.

Die Problematik der Dichte läßt sich aber umgehen. Die Tatsache, daß die Flächeninkreise des Mosaiks {6,3} eine dichteste Packung bilden, läßt sich noch verschärfen: hebt man von dieser Packung in beliebiger Weise endlich viele Kreise heraus, so kann man diese nur an ihre ursprünglichen Stellen zurücklegen. In folgender Definition kommt im wesentlichen diese Eigenschaft zum Ausdruck. Wir nennen eine Kreispackung *solid,* wenn keine endliche Teilmenge der Kreise sich so umordnen läßt, daß eine zu der ursprünglichen Packung inkongruente Packung entsteht. Nun gilt der Satz: *Die Flächeninkreise eines Mosaiks* {p, 3} *bilden für jeden ganzzahligen Wert von* $p > 2$ *eine solide Packung.* Abb. 3 stellt den Fall $p = 7$ im Poincaréschen Kreismodell dar.

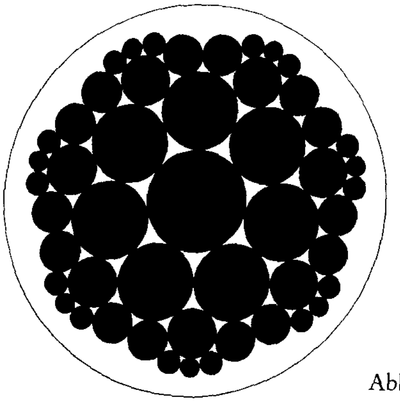

Abb. 3

Es läßt sich vermuten, daß auch die Flächeninkreise eines beliebigen sphärischen, Euklidischen oder hyperbolischen Archimedischen Dreikantmosaiks solid gepackt sind. Es gelang mir mit Hilfe eines allgemeinen Satzes (1968) in vielen Fällen, z. B. für das „Fußballmosaik" (5, 6, 6) und das hyperbolische Mosaik (6, 6, 7), dies nachzuweisen. G. Fejes Tóth (1974) hat meinen Beweis vereinfacht und den Satz verallgemeinert. Er überprüfte sämtliche Archimedische Dreikantmosaike, in denen höchstens 20seitige Flächen vorkommen. Es gibt 237 solche Mosaike. Von diesen erwies sich die obige Vermutung in 145 Fällen als richtig.

Lange Zeit widerstand das Mosaik (4, 8, 8) allen Beweisversuchen. Neulich gelang es A. Heppes die Solidität der Flächeninkreise auch dieses Mosaiks zu beweisen (Abb. 4). Aus seiner Methode ergab sich zugleich die Solidität einiger interessanten nicht Archimedischen Euklidischen Kreispackungen (Abb. 5, 6).

Im dreidimensionalen Raum sind unsere Kenntnisse bezüglich allgemeiner Packungen sehr beschränkt. Wir sind nicht einmal imstande die Frage zu beantworten, der wievielte Teil des Raumes sich durch kongruente Kugeln ausfüllen läßt. Um uns in diesem Problem zu orientieren, betrachten wir eine hexagonale

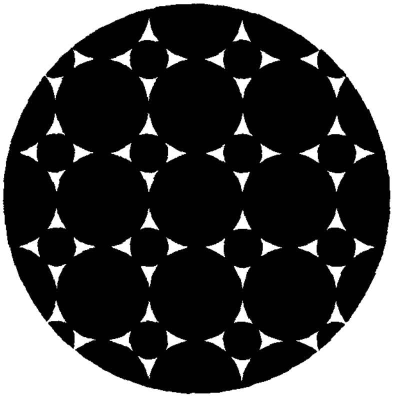

Abb. 4

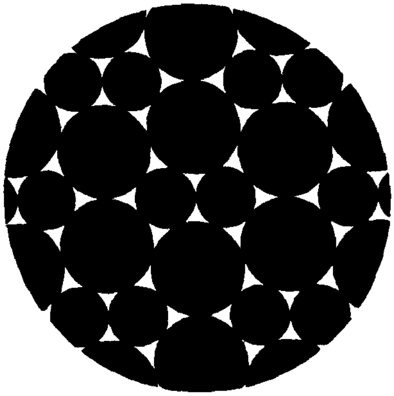

Abb. 5

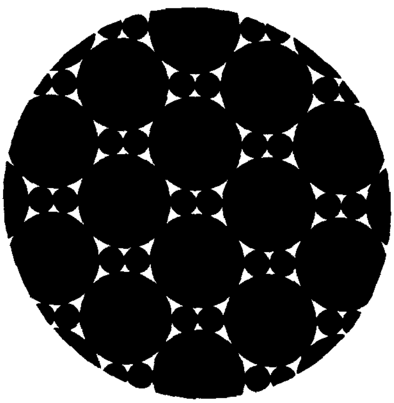

Abb. 6

Kugelschicht, in der die Kugelmittelpunkte in einer Ebene liegen, und zwar so, daß jede Kugel von sechs anderen berührt wird. Legen wir auf diese Schicht eine kongruente zweite Schicht so, daß jede Kugel der ersten Schicht von drei Kugeln der zweiten Schicht berührt wird. Wiederholen wir die Translationen, die die erste Schicht in die zweite und die zweite in die erste überführt unendlich oft, so entsteht eine Gitterpackung, die nach dem Satz von Gauß unter sämtlichen gitterförmigen Kugelpackungen die dichteste ist. Die Dichte dieser Packung beträgt $\pi / \sqrt{18} = 0{,}7048 \ldots$. Gibt es eine Packung von gleich großen Kugeln mit einer größeren Dichte? „Alle Physiker wissen und alle Mathematiker vermuten", daß die Antwort „nein" ist. Diese scherzhafte Bemerkung von C. A. Rogers bedeutet: Es besteht die wohlbegründete Vermutung, daß sich höchstens rund 74 % des Raumes durch kongruente Kugeln ausfüllen läßt. Dies steht aber noch nicht fest, trotz erheblicher Anstrengungen um es zu beweisen.

Auf eine hexagonale Kugelschicht kann man in zwei verschiedenen Lagen eine kongruente Schicht so legen, daß jede Kugel der einen Schicht drei Kugeln der anderen berührt. Wählt man eine dritte Schicht so, daß sie ein Spiegelbild der ersten Schicht bezüglich der Mittelebene der zweiten Schicht sei, und setzt dieses Verfahren fort, so entsteht eine andere, nicht gitterförmige, jedoch reguläre Kugelpackung, deren Dichte ebenfalls $\pi / \sqrt{18}$ beträgt. Beide Kugelpackungen werden in den Krystallstrukturen gewisser Metalle realisiert. Legt man bei einem sukzessiven Aufbau der Packung aus hexagonalen Schichten jede neue Schicht aufs Geratewohl in eine der beiden möglichen Lagen, so entsteht eine irreguläre Packung mit der Dichte $\pi / \sqrt{18}$. Eine Verschärfung der obigen Vermutung, die wir hier nicht exakt formulieren wollen, besagt, daß die betrachteten Packungen im wesentlichen die einzigen dichtesten Packungen von kongruenten Kugeln sind, daß also eine dichteste Kugelpackung stets aus hexagonalen Schichten besteht.

Können wir ein Problem nicht bewältigen, so empfiehlt der berühmte Mathematiker und Denker G. Pólya uns einem analogen, leichteren Problem zuzuwenden. Wir wollen hier zwei solche Probleme besprechen.

Maximalpackung von Kugeln. Wieviele materielle (d. h. nicht übereinandergreifende) Einheitskugeln lassen sich an eine Einheitskugel anlegen? Dies war eine Streitfrage zwischen Newton und David Gregory. Newton behauptete, daß die gesuchte Maximalzahl 12, Gregory, daß sie 13 ist. Erst 180 Jahre später wurde die Frage zu Newtons Gunsten entschieden. Dies veranlaßt uns zur folgenden Definition: Die *Newtonsche Zahl* eines konvexen Körpers K ist die Maximalzahl der kongruenten Exemplare von K, die sich mit K in Berührung bringen lassen. Die Newtonsche Zahl einer Kugel ist also 12. Wird in einer Packung von kongruenten Exemplaren von K jeder Körper von genau so vielen Körpern berührt, wie seine Newtonsche Zahl angibt, so sprechen wir von einer Packung maximaler Nachbarnzahl oder kurz von einer *Maximalpackung.*

Nun ist unser Problem, sämtliche Maximalpackungen von Kugeln anzugeben. Die oben betrachteten, aus hexagonalen Schichten bestehenden Packungen sind

Maximalpackungen, weil dort jede Kugel von sechs Kugeln seiner eigenen Schicht und von je drei Kugeln der beiden benachbarten Schichten, also insgesamt von zwölf Kugeln berührt wird. Es unterliegt keinem Zweifel, daß es keine andere Maximalpackung gibt, daß also jede maximale Kugelpackung aus hexagonalen Schichten besteht (und zwar in einem exakten Sinn).

Ich habe für diese Vermutung einen Beweisansatz angegeben (1969). Leider sind die Einzelheiten noch immer mit ziemlich großen technischen Schwierigkeiten verbunden.

Engste Packung von Kugeln. In einer Packung kongruenter Kugeln sei r das Supremum der Radien sämtlicher Kugeln, die im Zwischenraum der Packung liegen. Je kleiner r ist, desto „enger" ist die Packung. Gibt es unter den Packungen kongruenter Kugeln von vorgegebener Größe eine engste Packung, und wenn ja, wie schaut sie aus?

Es gelang Böröczky (1978) dieses Problem restlos zu erledigen. Er zeigte, daß es eine eindeutige Lösung gibt: *In einer engsten Packung bilden die Kugelmittelpunkte ein* sogenanntes *körperzentriertes Würfelgitter*, das so entsteht, daß man in einem Würfelgitter zu den Ecken der Würfel noch die Mittelpunkte der Würfel hinzunimmt.

Um dieses sehr schöne Ergebnis von einer anderen Seite zu beleuchten geben wir dem Problem eine andere Formulierung. In einer Kugelüberdeckung sei R das Supremum der Radien derjenigen Kugeln, die im Durchschnitt irgend zwei Deckkugeln enthalten sind. Je kleiner R ist, desto „lockerer" ist die Überdeckung. Gesucht wird unter den Überdeckungen des Raumes mit kongruenten Kugeln von vorgegebener Größe die lockerste.

Man sieht leicht ein, daß aus einer engsten Kugelpackung durch konzentrische Vergrößerung der Kugeln eine lockerste Überdeckung, und umgekehrt, aus einer lockersten Überdeckung durch konzentrische Verkleinerung der Kugeln eine engste Packung entsteht.

Bekanntlich bilden die Kugelmittelpunkte auch in der dünnsten Gitterüberdeckung des Raumes mit Kugeln ein körperzentriertes Würfelgitter. Es ist nicht bekannt, ob diese Überdeckung auch unter sämtlichen Überdeckungen eine dünnste ist. Jedenfalls ist sie aber eine lockerste Überdeckung.

Literatur

Böröczky, K. (1977): The Tammes problem for eleven points. Periodica Math. Hungar (im Druck).

—,— (1978): Close-packing of spheres. Acta Math. Acad. Sci. Hungar (im Druck).

Fejes Tóth, G. (1972): Covering the plane by convex discs. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 23, 263—270.

—,— (1974): Solid sets of circles. Studia Sci. Math. Hungar. 9, 101—109.

Fejes Tóth, L. (1940): Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschrift 46, 83—85.

—,— (1943): Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jber. dtsch. Math.-Ver. 53, 66—68.

—,— (1950): Some packing and covering theorems. Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math. 12/A, 62—67.

—,— (1953): Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag; zweite Auflage 1972.

—,— (1968): Solid circle-packings and circle-coverings. Studia Sci. Math. Hungar. 3, 401 bis 409.

—,— (1969): Remarks on a theorem of R. M. Robinson. Studia Sci. Math. Hungar. 4, 441—445.

Kershner, R. (1939): The number of circles covering a set. Amer. J. Math. 61, 665—671.

Molnár, J. (1966): Collocazion di cerchi con esigenza di spazio. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 9, 71—86.

Robinson, R. M. (1961): Arrangements of 24 points on a spere. Math. Ann. 144, 17—48.

Rogers, C. A. (1964): Packing and covering. University Press, Cambridge.

Schütte, K. und *van der Waerden, B. L.* (1951): Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. 123, 96—124.

Segre, B. und *Mahler, K.* (1944): On the densest packing of circles. Amer. Math. Monthly 51, 261—270.

Thue, A. (1892): Om nogle geometrisk taltheoriske Theoremer. Forhdl. Skand. Naturforsk. 14, 352—353.

—,— (1910): Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in der Ebene. Christiania Vid. Selsk. Skr. 1, 3—9.

van der Waerden, B. L. (1961): Pollenkörner, Punktverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie. Die Naturwissenschaften 48, 189—192.